ICMU
INTERNATIONAL CENTRE FOR MATHEMATICS IN UKRAINE

Summer School
«ATA XVI: Sub-Riemannian Geometry and Optimal Transport»

29 July - 7 August 2024 (**web page**, **registration**)

This school continues the tradition of Algebra, Topology and Analysis (ATA) summer schools in Ukraine (see here for the whole history of these schools). It combines scientific lectures and talks with informal communication and discussions. This year's edition will have minicourses on sub-Riemannian geometry and optimal transport along with other lectures delivered by the school participants. The aim of the School is to support talented students and post-graduates who are interested in fundamental mathematical research and to supply them with the newest information concerning the current status of research in these fields. There will also be some preliminary lectures on the basics of manifolds, foliations, spaces of jets, etc., aimed to help participants follow the subject.

List of lectures:

- **Introduction to manifolds** – Sergiy Maksymenko
- **Foliations and distributions on manifolds** – Dmitriy Bolotov
- **Sub-Riemannian Geometry** – Samuël Borza
- **An Introduction to Optimal Transport** – Wilhelm Klingenberg

Introduction to manifolds

(Sergiy Maksymenko)

A *manifold* is a topological space which is locally homeomorphic to some finite-dimensional euclidean space. These spaces are natural models for spaces of states of «real» systems and processes. Usually such a model is just the space of its parameters, which (in the case of finitely many parameters) can be regarded as a subset of some Euclidean space. Moreover, real systems often allow arbitrary small perturbations of their states, which can be interpreted so that every point of the space of systems has an open neighborhood homeomorphic with some Euclidean space, and thus it is a manifold.

Notice that we have a well-defined notion of a differentiable map between Euclidean spaces. Since the manifolds locally look like Euclidean space, it is possible to define the notion of a differentiable map between manifolds, but one needs to endow those manifolds with «smooth structures».

It should also be noticed that an implicit function theorem implies that for a smooth function on a Euclidean space its level set near each non-critical point has a natural structure of a manifold. Such a result also holds for smooth functions (and more generally) for smooth maps between manifolds. In other words, a smooth function f with the set of critical point A on a manifold M yields a partition of $M \setminus A$ into manifolds of dimension $\dim(M) - 1$. This kind of partition is called foliations. They play an important role in many branches of mathematics, and will appear in all the courses of this school. These two lectures will cover the following topics:

- Inverse/implicit map theorems and its variations.
- Smooth manifolds and smooth maps between them.
- Tangent vectors, tangent spaces and tangent bundle of a smooth manifold.
- Submanifolds.

Foliations and distributions on manifolds

(Dmitriy Bolotov)

A *foliation* on a manifold M is a partition of M which locally looks as a partition of euclidean space into "parallel" linear subspaces of the same smaller dimension. The elements of such partitions are called *leaves*. They naturally appear in mathematics almost everywhere, though this is not always explicitly visible. For example, a partition of the plane into horizontal lines is a foliation. It can also be regarded as a set of graphs of constant functions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Notice also that if in this example we are given another smooth function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, then its critical points are the ones at which the graph of f is tangent to the lines of the above horizontal foliation.

Such an interpretation of «criticality» in terms of tangent points of a submanifold to the leaves of some foliation is very important, however it is often not general enough. In different kinds of problems of analysis, geometry, topology, PDE (including SubRiemannian geometry and Optimal transport) at each point x of a manifold M we have only some linear subspace P_x of the tangent space $T_x M$, usually of dimension smaller than $\dim(M)$. Such a choice of tangent plane P_x at each point x is called a *distribution*. Now, given a submanifold A in M one looks for the points $x \in A$ at which A is tangent to the distribution, i.e. whose tangent space $T_x A$ is contained in P_x.

A subumanifolds $A \subset M$ tangent to the distribution at all points of A are called *integral*, and they are of a special interest. Every foliation $\mathcal{F}$ on a manifold yields a distribution P by tangent planes to its leaves being thus integral submanifolds of that distribution. However, not every distribution is tangent to some foliation. Moreover, there are distributions of codimension 1, the so-called *contact structures*, which do not admit integral submanifolds even locally. In this lecture we will discuss foliations, distributions, and the famous Frobenius theorem characterizing distributions tangent to foliations.

Sub-Riemannian Geometry

(Samuël Borza)

Sub-Riemannian geometry is a generalization of Riemannian geometry that models systems with nonholonomic constraints. These structures arise in several areas of mathematics, including control theory, harmonic and complex analysis, subelliptic PDEs, geometric measure theory, calculus of variations, optimal transport, and potential analysis. Sub-Riemannian geometry also plays a significant role in many applications of mathematics, such as robotics, quantum control, and neurogeometry. The lectures will cover the following topics.

1. Theory of distributions, sub-Riemannian structures, and admissible trajectory.
2. Controllability and Chow-Rachevsky theorem. Cauchy-Carathéodory theorem and the end-point map.
3. Necessary conditions for minimality : Pontryagin's Maximum Principle, normal and abnormal extremals.
4. The Heisenberg group, the Grushin plane, the Martinet flat structure, Contact structures, and Carnot groups.
5. Metric tangent for sub-Riemannian structures.

References.

- Andrei A. Agrachev, Davide Barilari, and Ugo Boscain. *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry*, Textbook
- André Bellaïche. *Sub-Riemannian Geometry*, Textbook
- Ludovic Rifford. *Sub-Riemannian Geometry and Optimal Transport*, Textbook

An Introduction to Optimal Transport

(Wilhelm Klingenberg)

Introduction. Optimal transport deals with the problem of moving one distribution of mass to another distribution as efficiently as possible. For example using a pile of sand to fill a hole of the same volume so as to minimize the average of the distance function $c(x, y) = |x-y|$ of sand that is moved in the process. It was first stated by Gaspard Monge in 1781 and has seen applications in mathematics, economy, data sciences, and image processing. The lectures will address this in the framework of the Calculus of Variations, will be self contained, and accessible to undergraduate students of mathematics.

Background in Analysis. We will define the concept of density function, which is the mathematical description of a mass, and its push forward by a map of domains, the definition of convexity of a function c, the second derivative condition, Legendre transform of a real function, convex dual of a functional, and Jensen's inequality.

The Monge Problem. We will cover the Monge minimization problem of transport for a continuous cost function $c(x, y)$. And we will compute an example in one space dimension.

The Dual Kantorovich Problem. We will present the associated dual maximization problem due to Leonid Kantorovich in 1942, and its relationship to MP.

Brenier Theorem. This chapter will feature the 1987 solution by Yann Brenier of the optimal transport problem for quadratic cost function $c(x, y) = |x - y|^2$ (rather than the Euclidean distance function alluded to above).

Optimal transport in sub-Riemannian geometry is the restriction of transport to occur along paths whose velocity vectors lie in certain subspaces.

References.

- Filippo Santambrogio. *Optimal Transport for Applied Mathematicians: Calculus of Variations, PDEs, and Modeling*, Textbook
- M. Thorpe. *Introduction to Optimal Transport*, notes
- L. Ambrosio, N. Gigli. *A user's guide to optimal transport*, notes

ICMU
INTERNATIONAL CENTRE FOR MATHEMATICS IN UKRAINE
МІЖНАРОДНИЙ ЦЕНТР МАТЕМАТИКИ В УКРАЇНІ

Літня школа «АТА XVI: Субріманова геометрія та оптимальне транспортування»

29 липня - 7 серпня 2024 (**web page**, **registration**)

Ця школа продовжує традицію українських літніх шкіл «Алгебра, Топологія і Аналіз» (АТА) (всю історію цих шкіл можна прочитати тут). Вона поєднує наукові лекції та доповіді з неформальним спілкуванням та дискусіями. Метою Школи є підтримка талановитих студентів і аспірантів, які цікавляться фундаментальними математичними дослідженнями, і надання їм найновішої інформації про сучасний стан досліджень у цих галузях. У цьогорічній школі будуть представлені міні-курси з суб-Ріманової геометрії та оптимального транспортування, та інші лекції, які читатимуть учасники школи. Також учасникам школи буде запропоновано декілька попередніх лекцій з основ теорії многовидів та теорії шарувань.

Список лекцій:

- **Вступ до теорії многовидів** – Сергій Максименко
- **Шарування та розподіли на многовидах** – Дмитро Болотов
- **Субріманова геометрія** – Самуель Борза
- **Вступ до оптимального транспортування** – Вільгельм Клінгенберг

Вступ до теорії многовидів
(Сергій Максименко)

Многовид – це топологічний простір, який є локально гомеоморфним деякому скінченновимірному евклідовому простору. Такі простори є природними моделями для просторів станів реальних процесів. Зазвичай, моделлю «реальної системи» є простір її параметрів, який (у випадку скінченного числа параметрів) можна розглядати як підмножину деякого евклідового простору. Крім того, реальні системи часто допускають довільні малі збурення своїх станів (значень параметрів). Останнє якраз і можна інтерпретувати так, що кожна точка простору станів має окіл гомеоморфний до евклідового простору, а отже цей простір є многовидом.

Оскільки многовиди локально виглядають як евклідові простори, то можна визначити поняття диференційовного відображення між многовидами, але ці многовиди попередньо потрібно наділити «гладкими структурами».

Слід також зауважити, що теорема про неявну функцію фактично стверджує, що для гладкої функції на евклідовому просторі її множина рівня в околі регулярної точки є многовидом. Цей результат також справедливий для гладких функцій (і більш загально) для гладких відображень між многовидами. Іншими словами, гладка функція f із множиною критичних точок A на многовиді M дає розбиття $M \setminus A$ на многовиди розмірності $\dim(M) - 1$. Такі розбиття є частинними випадками більш загальних розбиттів, які називають шаруваннями. Вони відіграють важливу роль у багатьох розділах математики та обговорюватимуться у всіх курсах цієї школи.

Лекції охоплюватимуть такі теми:

- Теореми про обернену/неявну функцію та їх варіації.
- Гладкі многовиди та гладкі відображення між ними.
- Дотичні вектори, дотичні простори та дотичне розшарування гладкого многовиду.
- Підмноговиди.

Шарування та розподіли на многовидах
(Дмитро Болотов)

Шарування на многовиді M — це розбиття M, яке локально виглядає як розбиття евклідового простору на «паралельні» лінійні підпростори однакової але меншої розмірності. Елементи таких розбиттів називають *листами*. Вони природно виникають (хоча не завжди в явному вигляді) в математиці майже скрізь. Наприклад, розбиття площини на горизонтальні лінії є шаруванням. Його також можна розглядати сукупність графіків постійних функцій $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Варто зауважити, що якщо в цьому прикладі нам дано іншу гладку функцію $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то її критичні точки відповідають точкам дотику графіка f до ліній наведеного вище горизонтального шарування.

Ця інтерпретація «критичності» в термінах дотичних точок підмноговиду до листів деякого шарування є дуже важливою і корисною, але навіть вона часто виявляється недостатньо загальною. У різних задачах аналізу, геометрії, топології, PDE (включаючи субріманову геометрію та оптимальне транспортування) у кожній точці x многовиду M ми маємо лише деяку дотичну площину P_x, розмірність якої зазвичай менша за $\dim(M)$. Задання таких дотичних площин P_x у всіх точках x з M називається *розподілом* на . В цій ситуації, маючи підмноговид A в M, ставиться питання про знаходження точок x на A, для яких їх дотичний простір $T_x A$ до A міститься в P_x.

Потрібно також зауважити, що кожне шарування на многовиді індукує розподіл дотичних площин до його листів. Однак не кожен розподіл є дотичним до деякого шарування. Більш того, існують розподіли корозмірності 1, так звані *контактні структури*, до яких неможливо провести дотичний многовид в жодній точці. У цій лекції ми обговоримо поняття шарувань та розподілів, а також відому теорему Фробеніуса, яка характеризує розподіли, що є дотичними до шарувань.

Субріманова геометрія

(Самуель Борза)

Субріманова геометрія є узагальненням ріманової геометрії, яка моделює системи з неголономними обмеженнями, що природно виникають у багатьох областях математики, таких як теорія керування, гармонічний та комплексний аналіз, субеліптичні диференціальні рівняння в частинних похідних, геометрична теорія міри, варіаційне числення, оптимальне транспортування та теорії потенціалів. Субріманова геометрія також відіграє значну роль у застосуваннях математики до робототехніки, квантового керування та нейрогеометрії. На лекціях будуть розглянуті наступні теми.

1. Теорія розподілів, субріманові структури та допустима траєкторія.
2. Керованість і теорема Чоу-Рачевського. Теорема Коші-Каратеодорі та відображення кінцевої точки.
3. Необхідні умови мінімальності: принцип максимуму Понтрягіна, нормальні та аномальні екстремалі.
4. Група Гейзенберга, площина Грушина, плоска структура Мартіне, контактні структури та групи Карно.
5. Метричні дотичні простори для субріманових структур

Література.

- Andrei A. Agrachev, Davide Barilari, and Ugo Boscain. *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry*, Textbook
- André Bellaïche. *Sub-Riemannian Geometry*, Textbook
- Ludovic Rifford. *Sub-Riemannian Geometry and Optimal Transport*, Textbook

Вступ до оптимального транспортування
(Вільгельм Клінгенберг)

Вступ. Теорія оптимального транспортування займається проблемою найефективнішого переміщення одного розподілу маси в інший розподіл. Наприклад, маючи купу піску потрібно заповнити ним отвір такого самого об'єму, так щоб при цьому додатково мінімізувати середнє значення функції відстані $c(x, y) = |x - y|$ піску, який переміщується в процесі. Вперше ця проблема була сформульована Гаспаром Монжем у 1781 році. Вона знайшла застосування в математиці, економіці, науках про дані, обробці зображень. Ми розглядатимемо цю проблему в рамках варіаційного числення. Лекції будуть автономними та доступними для студентів бакалаврату математики.

Базові поняття. Ми розглянемо поняття функції густини (яка є математичною моделлю маси) та подивимось як така маса переноситься вперед відображеннями, дамо означення опуклості функції, сформулюємо достатні умови опуклості в термінах другої похідної функції, і також обговоримо перетворення Лежандра дійсної функції, опукле спряження, та нерівність Єнсена.

Проблема Монжа. В цій лекції ми розглянемо проблему мінімізації транспортування Монжа для неперервної функції витрат $c(x, y)$ та обчислимо приклад в одновимірній ситуації.

Проблема двоїстості Канторовича. Ми обговоримо двоїсту задачу максимізації сформульовану Леонідом Канторовичем у 1942 році, та її зв'язок з проблемою Монжа.

Теорема Бреньє. В цій лекції буде наведено розв'язок оптимальної транспортної задачі для квадратичної функції вартості $c(x, y) = |x - y|^2$ (не функції евклідової відстані, про яку згадувалося вище), отриманий Янном Бреньє в 1987 році.

Оптимальним транспортуванням в субрімановій геометрії називають обмеження транспортування на шляхи, вектори швидкості яких лежать у певних підпросторах.

Література.

- Filippo Santambrogio. *Optimal Transport for Applied Mathematicians: Calculus of Variations, PDEs, and Modeling*, Textbook
- M. Thorpe. *Introduction to Optimal Transport*, notes
- L. Ambrosio, N. Gigli. *A user's guide to optimal transport*, notes